PRUEBAS DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD DE LAS ISLAS BALEARES.
MATEMATICAS II. JUNIO 2021

1.- Dada la matriz $A=\begin{pmatrix} a^2 & a & a \\ a & a^2 & 1 \\ a & 1 & a^2 \end{pmatrix}$,

(a) Estudia el rango de la matriz A según los valores de a. (6 puntos)
(b) Determina para qué valores de a la matriz A es invertible. (1 punto)

(c) Para el valor de a = -1 calcula la solución, X, de la ecuación o matricial $A\cdot X=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. (3 puntos)

$$|A|=\begin{vmatrix} a^2 & a & a \\ a & a^2 & 1 \\ a & 1 & a^2 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 0 & 0 & a-a^3 \\ 0 & a^2-1 & 1-a^2 \\ a & 1 & a^2 \end{vmatrix}=a\cdot\begin{vmatrix} 0 & a-a^3 \\ a^2-1 & 1-a^2 \end{vmatrix}=a\cdot(-1)\cdot(a^2-1)\cdot(a-a^3)=-a\cdot(-1)\cdot(a^2-1)\cdot a\cdot(1-a^2)$$

$$|A|=a^2\cdot(a^2-1)^2 \Rightarrow Si\ |A|=0 \Rightarrow a^2\cdot(a^2-1)^2=0 \Rightarrow a^2\cdot(a-1)^2(a+1)^2=0 \Rightarrow \begin{cases} a-1=0 \Rightarrow a=1 \\ a=0 \\ a+1=0 \Rightarrow a=-1 \end{cases} \Rightarrow$$

$\forall a\in\mathbb{R}-\{-1,0,1\} \Rightarrow |A|\neq 0 \Rightarrow rang\ (A)=3$

Si $a=-1$

$$A=\begin{pmatrix} (-1)^2 & -1 & -1 \\ -1 & (-1)^2 & 1 \\ -1 & 1 & (-1)^2 \end{pmatrix}\equiv\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\equiv\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\Rightarrow rang\ (A)=1$$

Si $a=0$

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\Rightarrow rang\ (A)=2$$

Si $a=1$

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\equiv\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\Rightarrow rang\ (A)=1$$

b) Una matriz tiene inversa siempre que su determinante no sea nulo

$\forall a\in\mathbb{R}-\{-1,0,1\} \Rightarrow |A|\neq 0 \Rightarrow$ *Entonces existe* A^{-1}

c)

Para $a=-1 \Rightarrow |A|=0 \Rightarrow$ *Como el sistema es homogéneo es Compatible Indeterminado*

$$A\cdot X=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\Rightarrow\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\Rightarrow\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\Rightarrow\begin{pmatrix} x-y-z \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\Rightarrow x-y-z=0 \Rightarrow x=y+z$$

Solución $\Rightarrow (x,y,z)=(\lambda+\mu,\lambda,\mu)$

2.- Sea la matriz $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

(a) Calcula A^t, A^2 y A^{-1}, donde A^t es la matriz transpuesta y A^{-1} la inversa. (3 puntos)

(b) Sea I la matriz identidad. Calcula X en la ecuación $A^2 - 2AX + I = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}$. (3 puntos)

(c) Calcula todas las matrices B para las que se verifica que $A\cdot B = B\cdot A^t$. (4 puntos)

a)

$$A^t=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^2=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}^2=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$$

$$|A|=\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}=1-2=-1\neq 0\Rightarrow A^{-1}=\frac{1}{|A|}\cdot adj\ A^t\Rightarrow A^t=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\Rightarrow adj\ A^t=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}\Rightarrow A^{-1}=\frac{1}{(-1)}\cdot\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

b)

$$-2AX=\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}-A^2-I\Rightarrow AX=\left(-\frac{1}{2}\right)\left[\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}-A^2-I\right]=\left(-\frac{1}{2}\right)\left[\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right]=\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot\begin{pmatrix} -2 & -2 \\ -4 & -8 \end{pmatrix}$$

$$AX=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}\Rightarrow A^{-1}AX=A^{-1}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}\Rightarrow IX=A^{-1}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}\Rightarrow X=\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

c)

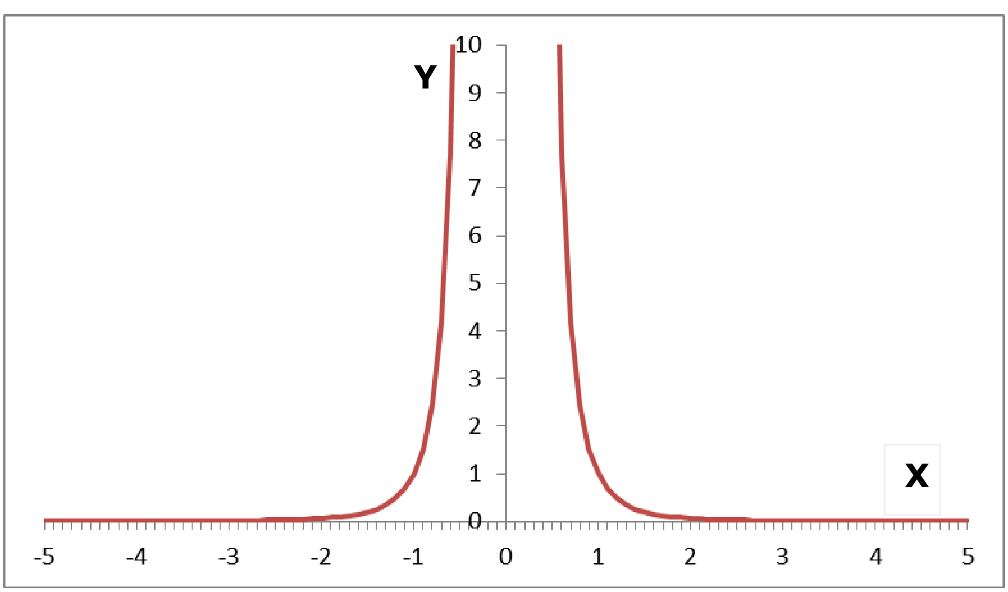
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\Rightarrow\begin{pmatrix} a+c & b+d \\ 2a+c & 2b+d \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a+b & 2a+b \\ c+d & 2c+d \end{pmatrix}\Rightarrow\begin{cases} a+c=a+b\Rightarrow b=c \\ b+d=2a+b\Rightarrow 2a=d \\ 2a+c=c+d\Rightarrow 2a=d \\ 2b+d=2c+d\Rightarrow 2b=2c\Rightarrow b=c \end{cases}$$

Las matrices son de la forma $B=\begin{pmatrix} \lambda & \mu \\ \mu & 2\lambda \end{pmatrix}$, $\lambda,\mu\in\mathbb{R}$

3.- Considera la función $f(x)=\dfrac{1}{x^4}$.

(a) Represéntala gráficamente. (7 puntos)
(b) Comprueba que f(2) = f(-2). (1 punto)
(c) Comprueba que no existe $c\in[-2, 2]$ tal que $f'(c) = 0$. (1 punto)
(d) ¿Hay una contradicción entre la conclusión y el teorema de Rolle? (1 punto)

a)



Continuación del Problema 3

b)

$$\begin{cases} f(2) = \dfrac{1}{2^4} = \dfrac{1}{16} \\ f(-2) = \dfrac{1}{(-2)^4} = \dfrac{1}{16} \end{cases} \Rightarrow f(2) = f(-2) \Rightarrow \text{Es una función simétrica respecto al eje OY}$$

c)

<u>Teorema de Rolle</u>

Sea f(x) una función continua en **[a , b]**, derivable en **(a , b)** y que verifica que **f(a) = f(b)**; entonces existe, al menos, un punto $c \in (a\ , b)$ tal que **f'(c) = 0**

$$\begin{cases} f(-2) = \dfrac{1}{(-2)^4} = \dfrac{1}{16} \\ f(2) = \dfrac{1}{2^4} = -\dfrac{1}{16} \end{cases} \Rightarrow f(-2) = f(2)$$

$$\textit{Teoricamente hay un punto } c \in (-2\ , 2) \textit{ en donde } f'(c) = 0$$

$$f'(x) = \frac{-4x^3}{x^8} = \frac{-4}{x^5} \Rightarrow f'(c) = 0 \Rightarrow \frac{-4}{x^5} = 0 \Rightarrow -4 = 0 \Rightarrow \text{Sin } \textit{solución} \Rightarrow \textit{No existe } c \in (-2\ , 2)$$

d) No hay contradicción ya que en **x = 0**$\in (-2\ , 2)$, **no hay continuidad**, **ni es derivable** en todo $(-2\ , 2)$ con lo que no se cumple la condición determinada en el teorema de Rolle

4.- Dada la función $f(x) = \dfrac{-x}{4 - x^2}$.

(a) Calcula una primitiva de f(x). (5 puntos)

(b) Calcula el área delimitada por la gráfica de f(x), las rectas $x = \sqrt{5}$ y $x = \sqrt{6}$, y el eje X. (5 puntos)

a)

$$F(x) = \int \frac{-x}{4 - x^2}\, dx = \int \frac{\frac{dt}{2}}{t} = \frac{1}{2}\int \frac{dt}{t} = \frac{1}{2} \cdot \ln t = \frac{1}{2} \cdot \ln\left(4 - x^2\right) + K = \ln\left(4 - x^2\right)^{\frac{1}{2}} + K = \ln\sqrt{4 - x^2} + K$$

$$4 - x^2 = t \Rightarrow -2x\, dx = dt \Rightarrow -x\, dx = \frac{dt}{2}$$

b)

$$\textit{Puntos de corte con OX} \Rightarrow y = 0 \Rightarrow \frac{-x}{4 - x^2} = 0 \Rightarrow x = 0$$

$$4 - x^2 = 0 \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x = \pm\sqrt{4} \Rightarrow \begin{cases} x = -2 \\ x = 2 \end{cases} \Rightarrow Dom\,(f) = \forall x \in \mathbb{R} - \{-2\ , 2\}$$

$$\frac{9}{4} \in \left(\sqrt{5}\ , \sqrt{6}\right) \Rightarrow \begin{cases} f\left(\sqrt{5}\right) = \dfrac{-\sqrt{5}}{4 - \sqrt{5}^2} = \dfrac{-\sqrt{5}}{-1} = \sqrt{5} \\ f\left(\sqrt{6}\right) = \dfrac{-\sqrt{6}}{4 - \sqrt{6}^2} = \dfrac{-\sqrt{6}}{-2} = \dfrac{\sqrt{6}}{2} \end{cases}$$

$$A = \int_{\sqrt{5}}^{\sqrt{6}} \frac{-x}{4 - x^2}\, dx = \frac{1}{2} \cdot \left[\ln\left(4 - x^2\right)\right]_{\sqrt{5}}^{\sqrt{6}} = \frac{1}{2} \cdot \left[\ln\left(4 - \sqrt{6}^2\right) - \ln\left(4 - \sqrt{5}^2\right)\right] = \frac{1}{2} \cdot \left[\ln(4 - 6) - \ln(4 - 5)\right] = \frac{1}{2} \cdot \ln\frac{-2}{-1} = \frac{\ln 2}{2}\, u^2$$

5.- Considera los puntos, A = (5, a, 7), B = (3, -1, 7), C = (6, 5, 4).
(a) Determina el valor del parámetro a para el que los puntos A, B y C forman un triángulo rectángulo, con el ángulo recto en el punto B. (3 puntos)
(b) Para el valor de a = -2, calcula el área del triángulo de vértice A, B y C. (3 puntos)
(c) Para el valor de a = 5, calcula el ángulo formado por los vectores **AB** y **AC**. (4 puntos)

a) Los vectores BA y BC son perpendiculares y su producto escalar nulo

$$\begin{cases} \overrightarrow{BA}=(5,a,7)-(3,-1,7)=(2,a+1,0) \\ \overrightarrow{BC}=(6,5,4)-(3,-1,7)=(3,6,-3)\equiv(1,2,-1) \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{BA}\perp\overrightarrow{BC} \Rightarrow \overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}=0 \Rightarrow (2,a+1,0)\cdot(1,2,-1)=0$$

$$2+2a+2+0=0 \Rightarrow 2a=-4 \Rightarrow a=-2$$

b) Es la mitad del módulo del producto vectorial de los vectores AB y AC

$$\begin{cases} \overrightarrow{AB}=(3,-1,7)-(5,-2,7)=(-2,1,0) \\ \overrightarrow{AC}=(6,5,4)-(5,-2,7)=(1,7,-3) \end{cases} \Rightarrow Área=\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\right| \Rightarrow \overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & 7 & -3 \end{vmatrix}=-3\vec{i}-14\vec{k}-\vec{k}-6\vec{j}$$

$$\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}=-3\vec{i}-6\vec{j}-15\vec{k} \Rightarrow \left|\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\right|=\sqrt{(-3)^2+(-6)^2+(-15)^2}=\sqrt{9+36+225}=\sqrt{370} \Rightarrow$$

$$Área=\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\right|=\frac{1}{2}\cdot\sqrt{370}=\frac{\sqrt{370}}{2}\,u^2$$

c) El coseno del ángulo que forman los dos vectores es igual al producto escalar de ambos entre el producto de sus módulos

$$\begin{cases} \overrightarrow{AB}=(3,-1,7)-(5,5,7)=(-2,-6,0)\equiv(1,3,0)\equiv \\ \overrightarrow{AC}=(6,5,4)-(5,5,7)=(1,0,-3) \end{cases} \Rightarrow \cos\alpha=\frac{\left|\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}\right|}{\left|\overrightarrow{AB}\right|\cdot\left|\overrightarrow{AC}\right|}=\frac{\left|(1,3,0)\cdot(1,0,-3)\right|}{\sqrt{1^2+3^2+0^2}\cdot\sqrt{1^2+0^2+(-3)^2}}=\frac{|1|}{\sqrt{10}\cdot\sqrt{10}}=\frac{1}{10}$$

$$\alpha=arc\cos\left(\frac{1}{10}\right)=84º15'39''$$

6.- Dadas las rectas $r\equiv\dfrac{x-m}{2}=\dfrac{y+1}{3}=\dfrac{z+2}{-1}$, $s:\begin{cases} x=1, \\ y=6+4\lambda, \\ z=-1+2\lambda. \end{cases}$

(a) Calcula el valor de m para que se corten en un punto, (7 puntos)
(b) Calcula el punto de corte. (3 puntos).

$$\begin{cases} r:\begin{cases} x=m+2\mu, \\ y=-1+3\mu \\ z=-2-\mu \end{cases} \\ s:\begin{cases} x=1, \\ y=6+4\lambda \\ z=-1+2\lambda \end{cases} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m+2\mu=1 \\ -1+3\mu=6+4\lambda \\ -2-\mu=-1+2\lambda \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2\mu=1-m \\ -4\lambda+3\mu=7 \\ -2\lambda-\mu=1 \end{cases} \Rightarrow |A/B|=\begin{vmatrix} 0 & 2 & 1-m \\ -4 & 3 & 7 \\ -2 & -1 & 1 \end{vmatrix}=0 \Rightarrow \begin{vmatrix} 0 & 2 & 1-m \\ 0 & 5 & 5 \\ -2 & -1 & 1 \end{vmatrix}=0$$

$$(-2)\cdot\begin{vmatrix} 2 & 1-m \\ 5 & 5 \end{vmatrix}=0 \Rightarrow (-2)\cdot(10-5+5m)=0 \Rightarrow 5+5m=0 \Rightarrow m=-1$$

c)

$$\begin{cases} 2\mu=1-(-1) \\ -4\lambda+3\mu=7 \\ -2\lambda-\mu=1 \end{cases} \Rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 0 & 2 & 2 \\ -4 & 3 & 7 \\ -2 & -1 & 1 \end{array}\right) \equiv \left(\begin{array}{cc|c} 0 & 2 & 2 \\ 0 & 5 & 5 \\ -2 & -1 & 1 \end{array}\right) \equiv \left(\begin{array}{cc|c} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow \mu=1 \Rightarrow P\begin{cases} x=-1+2\cdot1 \\ y=-1+3\cdot1 \\ z=-2-1 \end{cases} \Rightarrow P(1,\,2,\,-3)$$

7.- Se disponen de dos urnas: U_1 y U_2.
En U_1 hay: 4 bolas rojas y 5 bolas negras.
En U_2 hay: 6 bolas rojas y 3 bolas negras.
Al azar se saca una bola de U_1 y se introduce a U_2, a continuación se extrae al azar una bola de U_2. Calcula la probabilidad de que:
(a) salga una bola roja de U_2 (3 puntos)
(b) la bola extraída de U_1 sea negra, sabiendo que la bola que ha salido de U_2 también ha sido negra. (3 puntos)
(c) salga al menos una bola roja. (4 puntos)

Se disponen de dos urnas: U_1 y U_2.
En U_1 hay: 4 bolas rojas y 5 bolas negras.
En U_2 hay: 6 bolas rojas y 3 bolas negras.
Al azar se saca una bola de U_1 y se introduce a U_2, a continuación se extrae al azar una bola de U_2. Calcula la probabilidad de que:
(a)
salga una bola roja de U_2

Sea A la nueva urna U2 si la bola extraída de la urna U1 es roja.
Urna A 7 bolas rojas y 3 bolas negras

Sea B la nueva urna U2 si la bola extraída de la urna U1 es negra.
Urna B 6 bolas rojas y 4 bolas negras

Nos piden **p(bola roja en urna 2) =** p(sacar roja de U1)·p(sacar roja U2 habiendo sacado roja de U1) +
+ p(sacar negra de U1)·p(sacar roja U2 habiendo sacando negra de U1) =
= (4/9)·(7/10) + (5/9)·(6/10) **= 29/45 ≅ 0'64444.**
(b)
la bola extraída de U_1 sea negra, sabiendo que la bola que ha salido de U_2 también ha sido negra.

Nos piden **p(la bola extraída de U_1 sea negra, sabiendo que la bola que ha salido de U_2 también ha sido negra)**

Del apartado (a) tenemos *p(bola negra en urna 2) = 1 - p(bola roja en urna 2) = 1 - 29/45 = 16/45 ≅ 0'35556*

{*} = p(negra U1)·p(negra en urna 2) = (5/9)·(16/45) **= 16/81 ≅ 0'19753**
(c)
salga al menos una bola roja.

Nos piden **p(salga roja en U1 o salga roja en U2) =**
= p(salga roja en U1) + p(salga roja en U2) - p(salga roja en U1 y salga roja en U2) =
= (4/9) + (29/45) – (4/9)·(29/45) **= 65/81 ≅ 0'802469.**

8.- Una compañía aérea ha observado que los pesos de las maletas de un determinado trayecto siguen una distribución o normal de media 7'5 kg y desviación típica de 0'4 kg. Calcula la probabilidad de que, elegida una maleta al azar:
(a) pese menos de 7'2 kg pero más de 7 kg. (4 puntos)
(b) pese entre 7'8 kg y 8 kg. (3 puntos)
(c) Si en un trayecto hay 90 maletas, ¿cuántas maletas es de esperar que pesen al menos 8,1 kg? (3 puntos)

Una compañía aérea ha observado que los pesos de las maletas de un determinado trayecto siguen una distribución o normal de media 7'5 kg y desviación típica de 0'4 kg. Calcula la probabilidad de que, elegida una maleta al azar:
(a)
pese menos de 7'2 kg pero más de 7 kg.

X = pesos de las maletas sigue una normal $N(\mu, \sigma) = N(7'5, 0'4)$

Nos piden p(7 ≤ X ≤ 7’2) = {tipificando} = $p\left(\frac{7 - 7'5}{0'4} \le Z \le \frac{7'2 - 7'5}{0'4}\right)$ = p(-1’25 ≤ Z ≤- 0’75) = {simetría} =

= p(0’75 ≤ Z ≤ 1’25) = p(Z ≤ 1’25) - p(Z ≤ 0’75) = 0’8944 – 0’7734 **= 0’121**

(b)

pese entre 7’8 kg y 8 kg.

Nos piden p(7’8 ≤ X ≤ 8) = {tipificando} = $p\left(\frac{7'8 - 7'5}{0'4} \le Z \le \frac{8 - 7'5}{0'4}\right)$ = p(0’75 ≤ Z ≤ 1’25) **= 0’121**, **del apartado (a).**

(c)

Si en un trayecto hay 90 maletas, ¿cuántas maletas es de esperar que pesen al menos 8,1 kg?

Sabemos que el número de maletas pedido es 90 por la probabilidad de pesar al menos 8’1 kg

Tenemos p(al menos 8’1 kg) = p(pesan más de 8’1) = p(X ≥ 8’1) = {tipificando} = $p\left(Z \ge \frac{8'1 - 7'5}{0'4}\right)$ =

= p(Z ≥ 1’5) = = 1- p(Z ≤ 1’5) = 1 - 0’9332 = 0’0668.

Luego 90·0’0668 = 6’012, luego por lo menos 6 maletas pesan al menos 8’1 kg.